

Volatilitätsmodelle in der Praxis

Hans Bühler

Global Quantitative Research, Deutsche Bank AG Global Equities

hans.buehler@db.com
<http://www.dbquant.com>

Berlin, May 8th 2003





Übersicht

- Die implizite Volatilitätsstruktur
 - Eigenschaften, Implikationen
- Modellierung mit Ein-Faktor-Modellen
 - Dupire, Derman-Kani
 - Eigenschaften und Konsequenzen.
- Modellierung mit stochastischer Volatilität
 - Prinzipien, Pricing und Hedging
 - Beispiel: Heston, CGMY
- Vergleich verschiedener Modelle
- Zusammenfassung

Implied Volatility

- Die “implizite Volatilität” einer Option wird durch Inversion der Black&Scholes-Formel berechnet (gegeben Marktpreis, Discountfaktor und Forward).
- Das Black&Scholes-Model

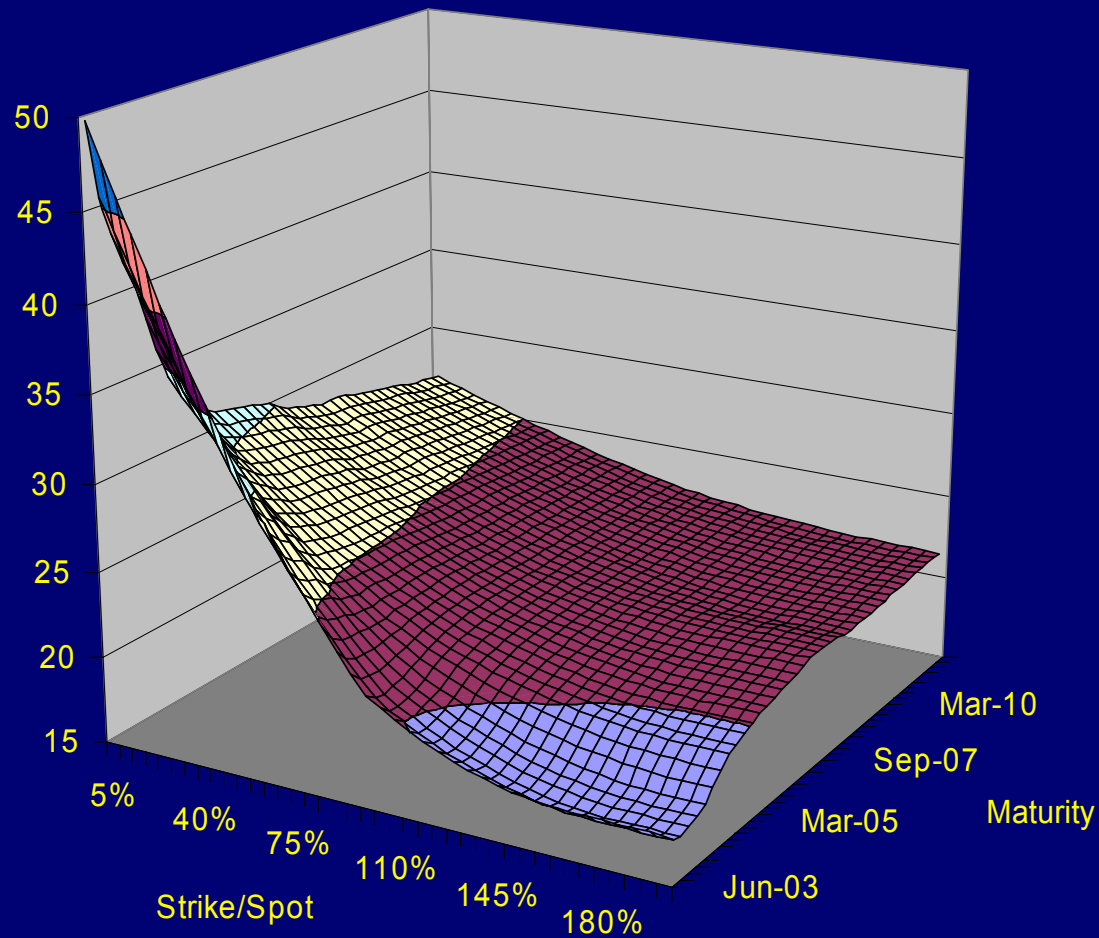
$$dS_t = (r_t - d_t)S_t dt + \sigma_t S_t dW_t$$

verwendet eine deterministische Volatilität - demzufolge müssten alle Optionen mit einer gemeinsamen Laufzeit die gleiche Volatilität implizieren.

→ Dies ist leider nicht der Fall:



Implizite Volatilität - Nikkei 225 am 15. April 2003





Der Smile

■ Eigenschaften:

- Die Volatilität steigt bei fallendem Strike (Optionen sind teurer).
- Dieser “Smile” läßt bei längerer Laufzeit nach.
- Seine spezielle Form hängt vom Markt ab.
- Existiert in ausgeprägter Form seit 1987.

■ Warum existiert der Smile:

- Asymmetrie in der Riskobewertung von Preisbewegungen.
- Historische Korrelation zwischen Volatilität und Preisniveau ist negativ.
- Puts werden zur Kreditsicherung eingesetzt.

“Pricing with a Smile”

(Dupire Risk Jan 1994)

- Viele exotische Produkte sind Smile-sensitiv:
 - Barriers, z.B. “up-and-out” call: $1_{\{\sup_{t \leq T} S_t < B\}} \cdot (S_T - K)^+$
 - Convertible Bonds
 - Altiplanos
 - Conditional Trigger Swaps
 - etc.

- Dies erfordert die Abkehr vom klassischen Black&Scholes-Model und den Übergang zu erweiterten Modellen



Modellierung - Anforderungen

- Entwicklung neuer Modelle mit den Zielen
 - den Smile mit einem Model konsistent zu reproduzieren,
 - strukturierte Produkte effizient zu preisen und
 - abzusichern.

- Weitergehende Fragen
 - Stabilität des Prozesses über die Zeit (→ Rekalibrierung)
 - Implizite dynamik des Prozesses (→ Forward-Started Options)



Modellierung - Konzepte

■ Ein-Faktor Modelle

- Dupire: Local volatility
- Derman, Kani: Implied Trees

■ Stochastic Volatility

- Merton: Jump Diffusion
- Heston: Square-Root process
- Bates: Heston and Merton zusammen
- Carr, German, Medan, Yor: VG, CGMY, stochastic time change,...



Ein-Faktor Modelle: Derman Kani - Implied Trees

- Optionspreise für *alle* Strikes und Laufzeiten sind bekannt.
- Stückweise Konstruktion der Übergangswahrscheinlichkeiten im Baum
→ Konsistente Bewertung der Optionen auf dem Baum.
- Nachteile:
 - Es können nur Optionen auf den Knoten des Baums berechnet werden
→ Neukalibration eventuell notwendig
 - Bei Änderung der numerischen Genauigkeit muß neu kalibriert werden
 - Monte-Carlo Methode per se nicht unterstützt;
generelle Geschwindigkeitsprobleme bei Bäumen mit langen Laufzeiten.

Ein Faktor-Modelle: Dupire's Local Volatility

- Eindimensionale Brownsche Bewegung als treibender Prozess. Die Volatilität hängt vom Spot ab:

$$dS_t = (r_t - d_t)S_t dt + \sigma_t(S_t)S_t dW_t$$

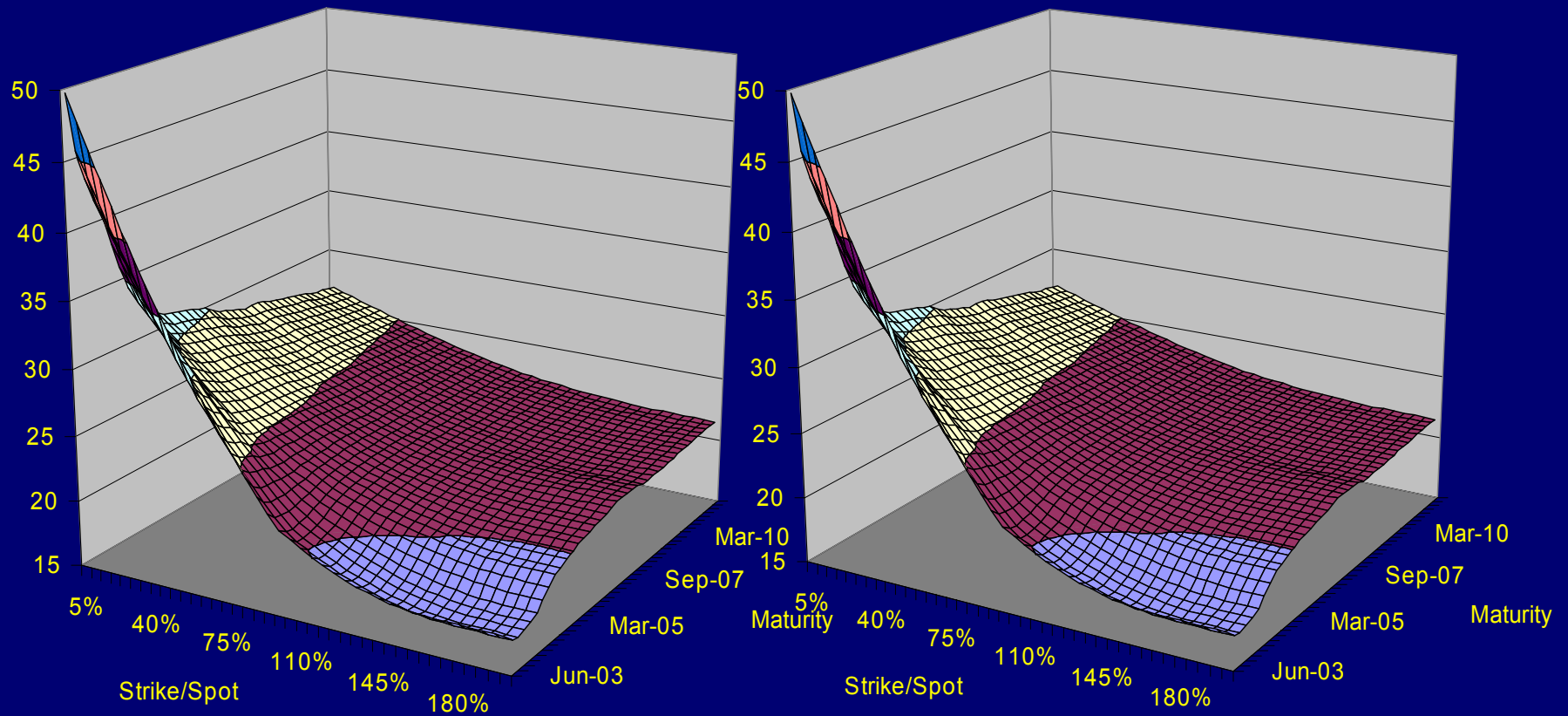
- Für σ existiert nach Dupire eine geschlossene Formel:

$$\sigma_t^2(S) = \frac{\partial_T C_{T,S} + (r_T - d_T)S \cdot \partial_K C_{T,S} + d_T \cdot C_{T,S}}{S^2 \cdot \partial_K^2 C_{T,S}}$$

- Wieder: Alle Call-Preise $C_{T,K}$ seien bekannt.
 - Extrapolation notwendig.



Ein-Faktor Modelle: Dupire



– Probleme bei kurzen Laufzeiten.

Ein-Faktor Modelle: Vorteile von Dupire

- Theoretisch perfekte Randverteilungen → „schöne“ Lösung. Vollständiger Markt.
 - Keine Kalibration notwendig, analytische Formel.
 - Konsistente Preise bei Laufzeiten über 6m.
 - Strukturierte Produkte können effizient mit ein-Faktor Finite Difference Systemen oder Monte-Carlo gepreist werden.
- ⇒ Dupire's Modell ist per se gut zur Optionsbewertung geeignet.

Ein-Faktor Modelle: Probleme mit Dupire

■ Technische Probleme:

- Extrapolation und Interpolation kann großen Einfluß auf den Preis von Optionen am Rand der Marktverteilung haben.

■ Absicherung:

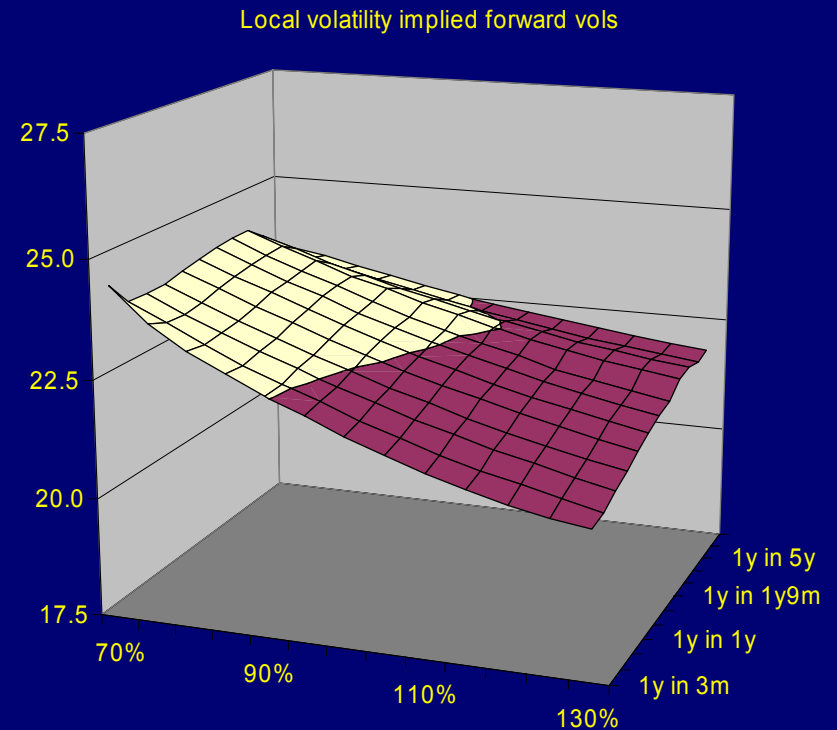
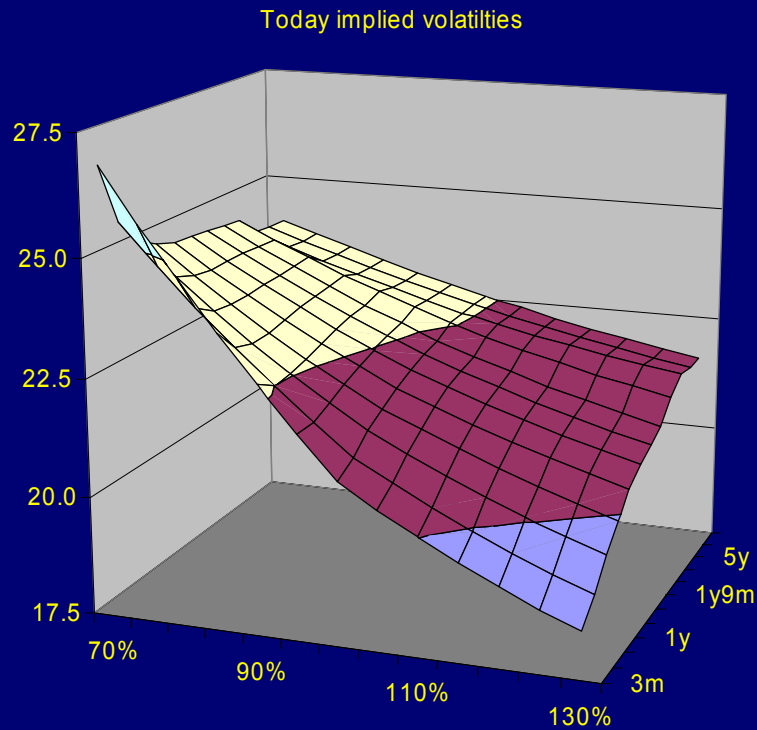
- Die Volatilitätsstruktur ist *nicht* lokal von den Optionen abhängig - zum Absichern eines Produktes muß eine eine große Anzahl von Marktinstrumenten investiert werden (der Markt ist nur theoretisch vollständig).

■ Forward Started Options: $\mathbf{E}\left(\frac{S_T}{S_t} - K\right)^+$



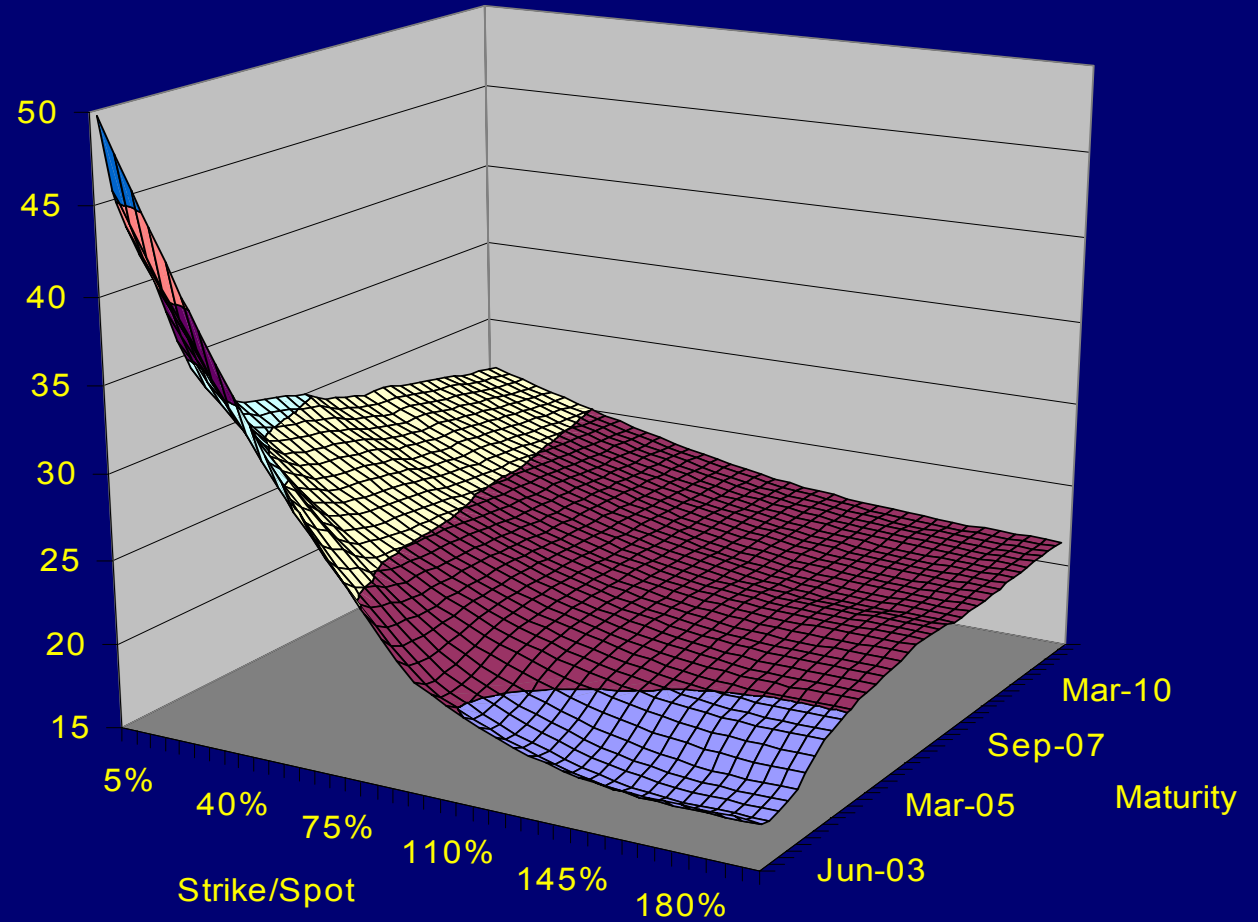
Ein-Faktor Modelle: Probleme mit Dupire

- Inkonsistente Dynamik
 - Die Volatilitätsstruktur ist nicht stabil über die Zeit.





Ein-Faktor Modelle: Local Volatility





Ein-Faktor Modelle: Zusammenfassung

■ Vorteile

- Theoretisch “schön”.
- Ein-Faktor impliziert schnellere numerische Verfahren
- Am Bewertungstag konsistent.

■ Nachteile

- Dynamik nicht korrekt
 - Neuberechnung erfordert Hedging der Volatilitätsstruktur
 - häufige Investitionen in viele Marktinstrumente notwendig.
- Fehlerhafte “Forward-Start” Preise.



Stochastische Volatilität: Motivation

- Ein erweiteres Model sollte
 - Konsistent mit (wesentlichen) Marktinstrumenten sein.
 - Effizient berechenbar sein.
 - Ein über die Zeit stabiles Verhalten besitzen und “Forward-Start” Optionen korrekt bewerten.
 - Bewertung und absicherung strukturierter Produkte erlauben.

- Der Benchmark ist Dupire.

Stochastische Volatilität: Konzepte

- Modelle mit “stochastischer Volatilität” haben eine Dynamik

$$dS_t = (r_t - d_t)S_t dt + \sigma_t S_t dW_t$$

bei der σ selbst ein stochastischer Prozess ist:

$$d\sigma_t = \lambda_t dt + \zeta_t dW_t^\sigma$$

- Andere Varianten verwenden Poissonprozesse.
- Die Integranden λ und ξ werden typischerweise durch Modellparameter $\underline{\sigma} = (\underline{\sigma}_1, \dots, \underline{\sigma}_v)$ spezifiziert.
 - Modelle i.A. nicht vollständig
→ Modellparameter nicht eindeutig und müssen geschätzt werden.

Stochastische Volatilität: Beispiel Hull & White

■ Hull & White (1987): Log-Normal Variance:

$$d\sigma_t^2 = \theta\sigma_t^2 dt + \zeta\sigma_t^2 dW_t^\sigma$$

- “Vol of Vol” ξ : kontrolliert die Variation der Volatilität
- “Average vol” θ : durchschnittliche Volatilität
- “Correlation” ρ zwischen den treibenden Brownschen Bewegungen.
- Die implizite variable “Short vol” σ_0 ist nicht beobachtbar und wird demnach wie ein Parameter behandelt.

Stochastische Volatilität: Beispiel Heston

- Heston hat 1993 die folgende Dynamik vorgeschlagen:

$$d\sigma_t^2 = \kappa(\theta - \sigma_t^2)dt + \zeta\sigma_t dW_t^\sigma$$

- “Vol of Vol” ξ : kontrolliert die Variation der Volatilität
 - “Long vol” θ : durchschnittliche Langzeitvolatilität
 - “Reversion speed” κ : Drift zur Long Vol.
 - “Correlation” ρ zwischen den treibenden Brownschen Bewegungen.
 - Die implizite variable “Short vol” σ_0 ist nicht beobachtbar und wird demnach wie ein Parameter behandelt.
-
- Sehr populäres Model.

Stochastische Volatilität: Beispiel JumpDiffusion

- Merton (1987) hat Sprünge im Preisprozess angenommen:

$$dS_t = (r_t - d_t)S_{t-}dt + \sigma_t^{\text{ATM}}S_{t-}dW_t^\sigma + S_{t-}dP_t$$

- Der Prozess P ist ein kompensierter Poisson-Prozess mit Intensität λ und (γ, δ) -normalverteilten unabhängigen Sprüngen.
 - Die impliziten Randverteilung besitzen einen sehr ausgeprägten Smile.
- Bates hat dieses Modell mit Heston's Ansatz kombiniert.

Stochastische Volatilität: Beispiel CGMY

- Carr, Geman, Medan und Yor (2000): Ein Levy-Prozess mit charakteristischer Funktion

$$\phi_T(v) := \exp\left(TC \cdot \Gamma(-Y) \cdot \{(M - iv)^Y - M^Y + (G + iv)^Y - G^Y\}\right)$$

- C: Skalierung
 - G und M: Rechts- bzw linksseitiger Abfall der Verteilung (symmetrisch bei Gleichheit)
 - Y: Charakterisierung der Aktivität
- Dieses Model wurde aufgrund statistischer Beobachtungen entwickelt.

Stochastische Volatilität: Konzepte

- PDE für den Einsatz von numerischen Standardmethoden
 - Feynman-Kac für FDs, Euler-Diskretisierung für Monte-Carlo.
 - Dadurch können strukturierte Produkte bewertet werden.
- Zur Berechnung Europäischer Optionen kann nach Carr & Medan (1999) Fourier-Transformation eingesetzt werden.
 - Schnelle und genaue Berechnung von Europäischen Optionen
 - Erweiterbar auf Forward-Start Vanillas.
 - Erfordert die Kenntnis der charakteristischen Funktion von $X_T := \log(S_T/S_0)$:

$$\phi_T(z) := \mathbf{E}[e^{izX_T}]$$

Stochastische Volatilität: Fourier-Pricing

■ Idee:

- Die charakteristische Funktion ψ des *Callpreises* (in Abhängigkeit vom log-Strike $k := \log(K)$) wird durch ϕ ausgedrückt:

$$\psi_T(v) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{ivk} \mathbf{E}[e^{-rT} (e^{X_T} - e^k)] dk \stackrel{!}{=} F(\phi_T(\dots))$$

- Berechnung des Callpreises durch Fourier-Inversion von ψ :

$$C_{T,K}(k) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikv} \psi_T(v) dv$$

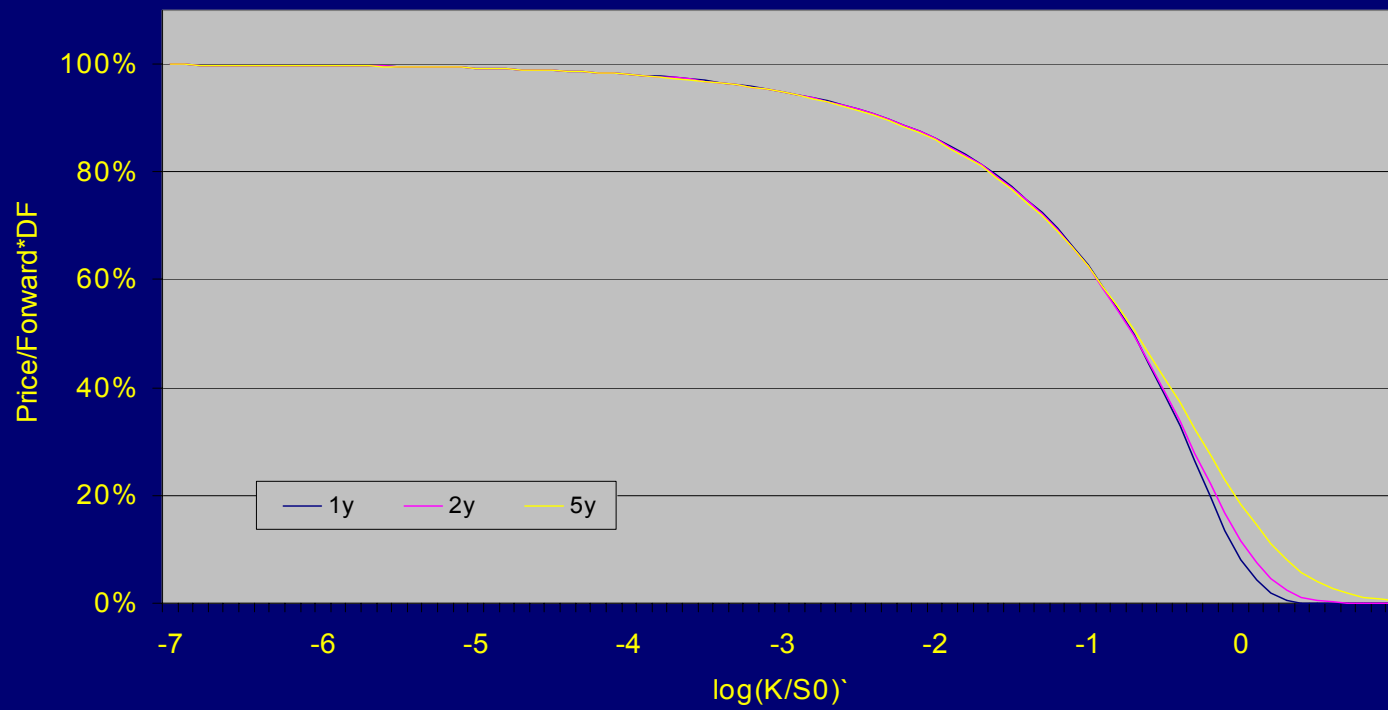


Stochastische Volatilität: Fourier-Pricing

■ Problem:

- Der Preis eines Calls ist nicht in quadratisch integrierbar:

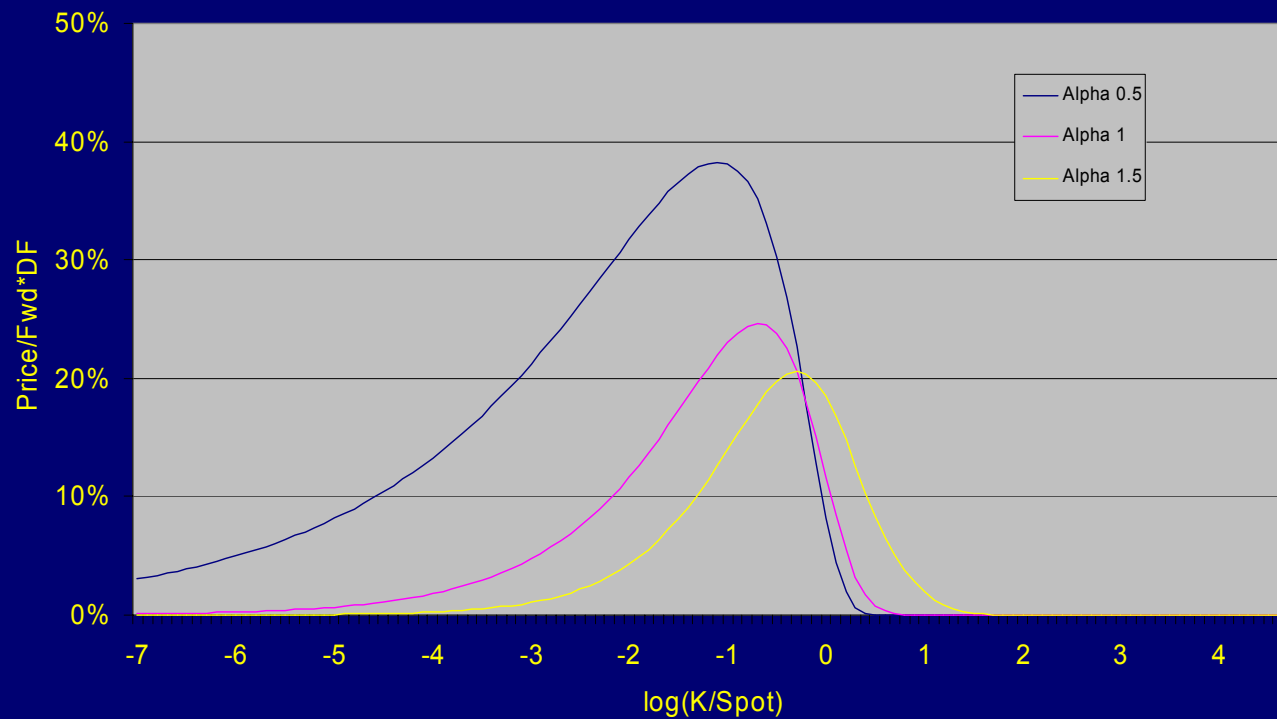
Call prices with respect to log-Strike



Stochastische Volatilität: Fourier-Pricing

- Lösung: "Dampfen" des Preises $\tilde{C}_{T,k} := e^{\alpha \cdot k} C_{T,e^k}$

Dampened Call prices with respect to log-Strike



Stochastische Volatilität: Fourier-Pricing

- Für jedes Modell existiert ein α so daß der “gedampfte” Call-Preis quadratisch integrierbar ist.
- Dann gilt für die Fourier-Transformierte des modifizierten Preises:

$$\tilde{\psi}_T(v) := e^{-rT} \frac{\phi_T(v - (\alpha + 1)i)}{\alpha^2 + 2\alpha v i + \alpha + v(i - v)}$$

- Diese kann mit Standardverfahren oder einem FFT-Algorithmus integriert werden. Letzterer kann mehrere Preise auf einmal berechnen.

Stochastische Volatilität: Parameterschätzung

- Die vorgestellten Modelle sind allesamt unvollständig. Demzufolge müssen die Modellparameter in Abhängigkeit von “wichtigen” Marktpreisen $(P_i)_{i=1,\dots,N}$ geschätzt werden.
- Diese “Kalibration” bedeutet de facto eine Minimierung von

$$F(\underline{\sigma}) = \sum_{i=1}^N w_i d[H_i(\underline{\sigma}), P_i]$$

wobei $H_i(\underline{\sigma})$ den Modellpreis der i . Option unter den Modellparametern $\underline{\sigma}$, d eine Metrik und w einen Vector von Gewichten bezeichnet.



Stochastische Volatilität: Parameterschätzung

- Daher die Notwendigkeit, Europäische Optionen effizient preisen zu können.
- In Verbindung mit FFT-Pricing können mehrer Optionen pro Maturity auf einmal berechnet werden.
- Probleme:
 - “Short Vol” ist eigentlich eine Variable
 - Gewichtung hat hohen Einfluß auf das Ergebnis → saubere Zieldefinition ist notwendig.
 - Generische Minimierung kann in einem lokalen Minimum enden.



Stochastische Volatilität: Hedging

- Modelle sind nicht vollständig, d.h. Auszahlungen können i.A. nicht durch Handeln im Stock allein repliziert werden.
 - Mathematisch klar durch die Verwendung weiterer stochastischer Prozesse.
 - Theoretisch ist die Verwendung einer weiteren Option ausreichend.
- Praktisch gesehen ist ein Modell vermutlich nicht perfekt.
 - Zur Absicherungen müssen mehrere liquide Optionen verwendet werden.
 - Die Modellparameter ändern sich mit der Zeit.

Stochastische Volatilität: Hedging

- Der Preis eines strukturierten Produktes p ist eine Funktion der Modellparameter, $p \equiv p(\underline{\sigma})$.
- Hedging
 - Alle Produkte, die mit dem Modell bewertet werden, bilden ein Portfolio P .
 - Dieses hat Sensitivitäten $(\partial_{\sigma_i} P)_{i=1, \dots, n}$ bezüglich der Modellparameter.
 - Berechne Vanilla-Portfolio mit den inversen Sensitivitäten, so daß eine (kleine) Änderung eines Modellparameters den Wert des gesamten Portfolios “nicht” ändert.
 - Dafür reichen im Prinzip n Optionen, allerdings ist deren Auswahl durch praktische Beschränkungen erschwert (Marktvolumen, Liquidität, Investitionssumme usw).



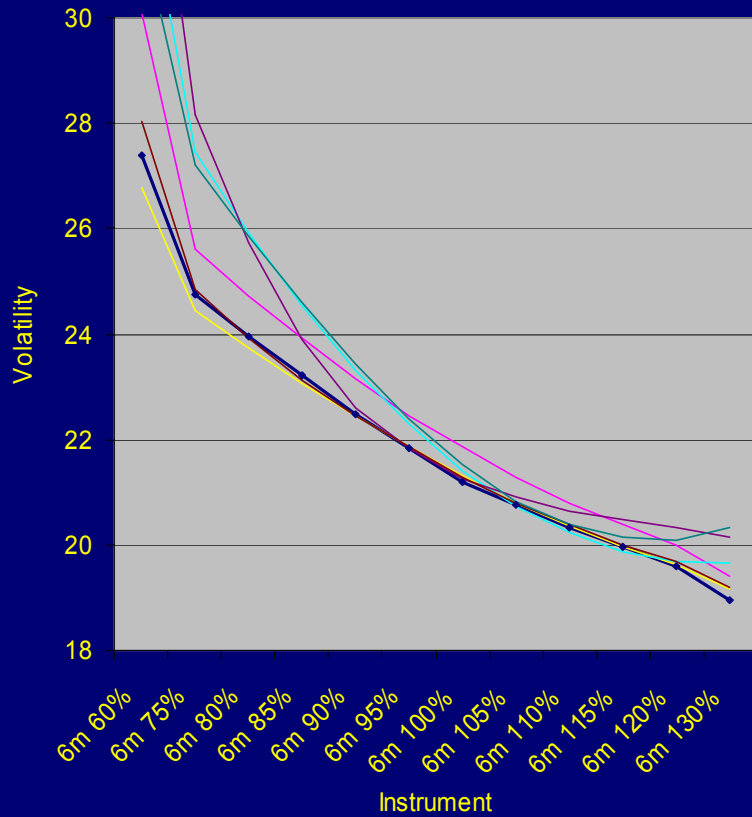
Die Auswahl eines geeigneten Modells

- Die Auswahl eines bestimmten Modells hängt vom Produkt und vom Markt ab.
- Wir Kalibrieren einige Modelle:
Kalibration zu 6m, 1y, 1y6m und 2y Optionen in einer Strike-Range von 60% bis 130% Spot (Gewichtung Marktpreis).
- Vergleich mit Dupire und Markt.

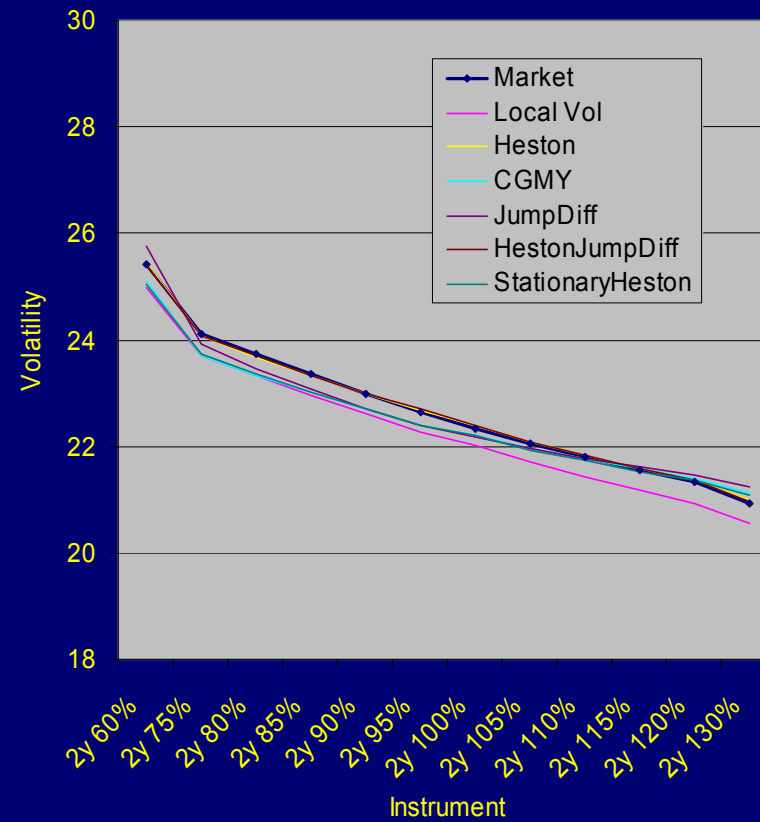


Ergebnis der Kalibration

Implied volatilities 6m



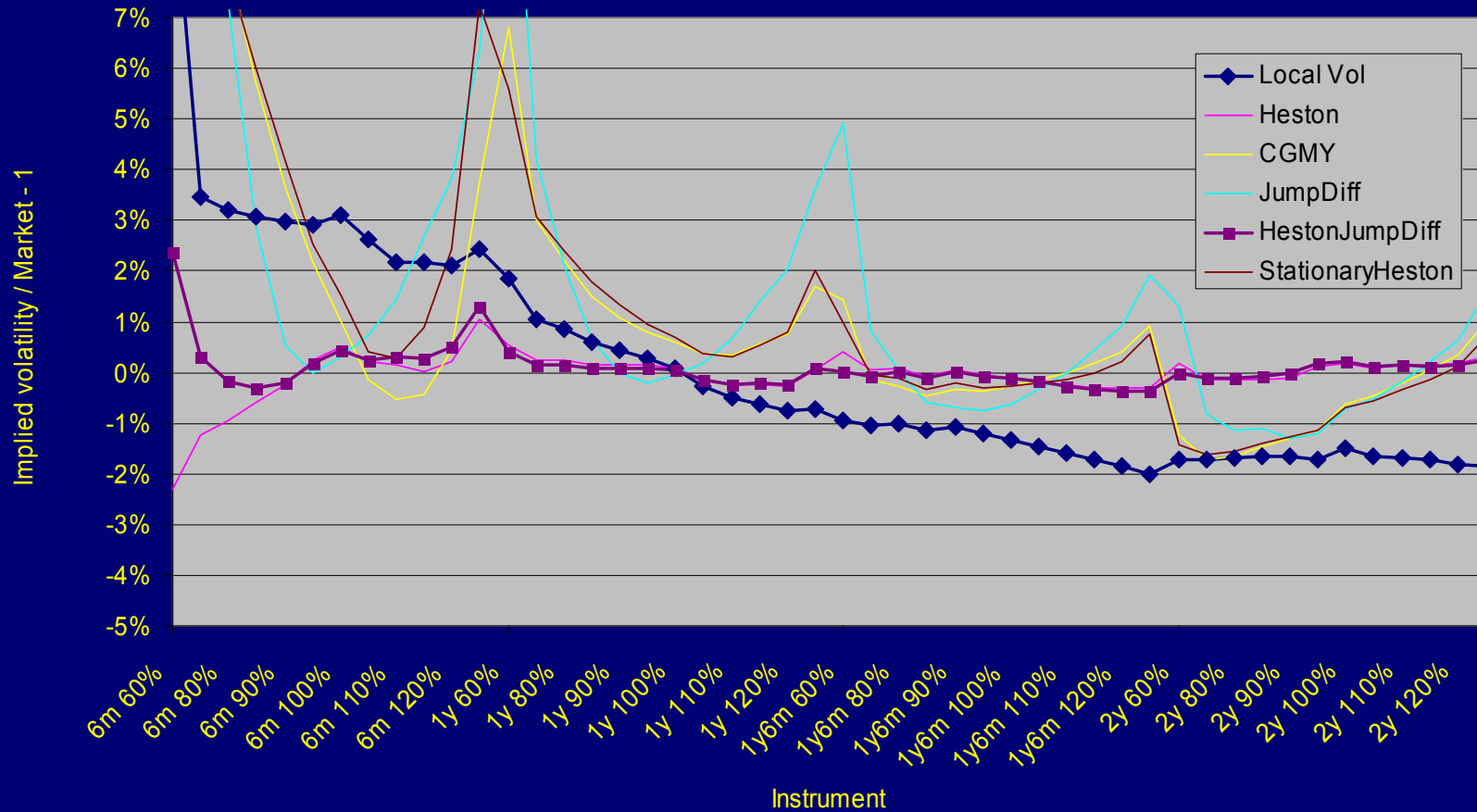
Implied volatilities 2y





Dichtere Darstellung

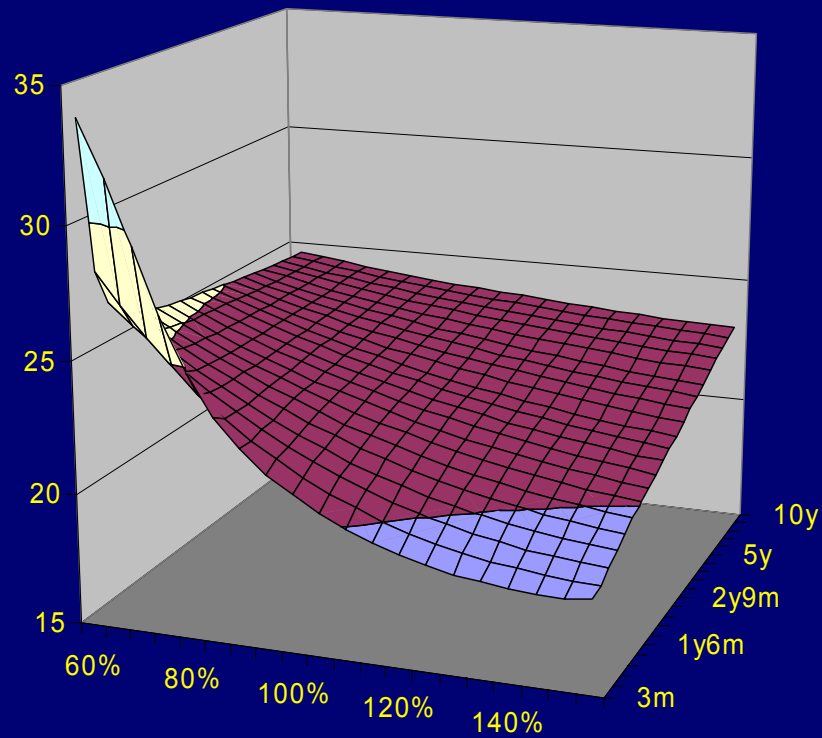
Errors in implied volatilities of calibration instruments



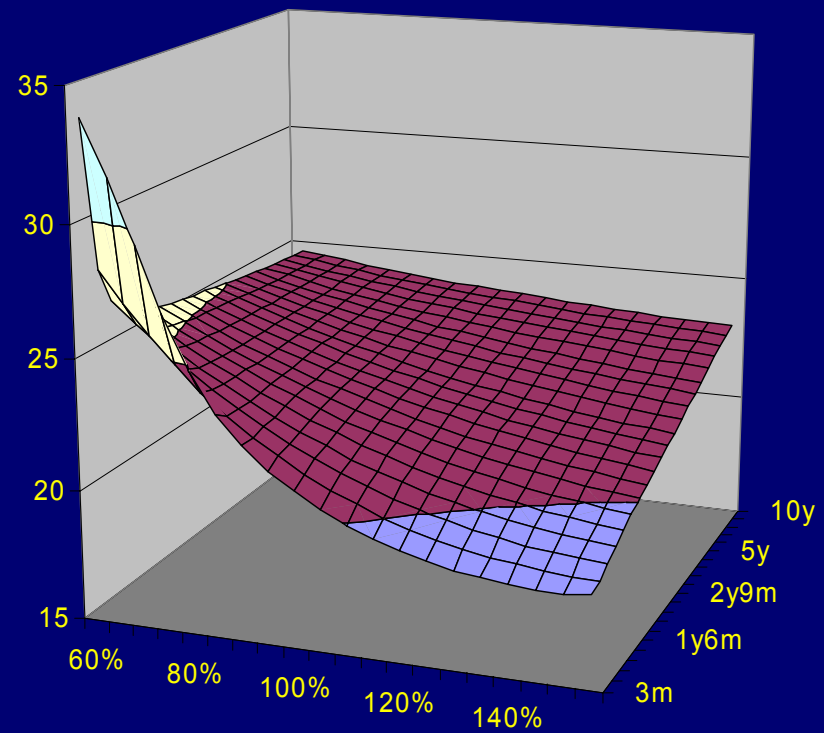


Sehr schönes Ergebnis für Heston

HestonJumpDiff implied volatility



HestonJumpDiff implied volatility

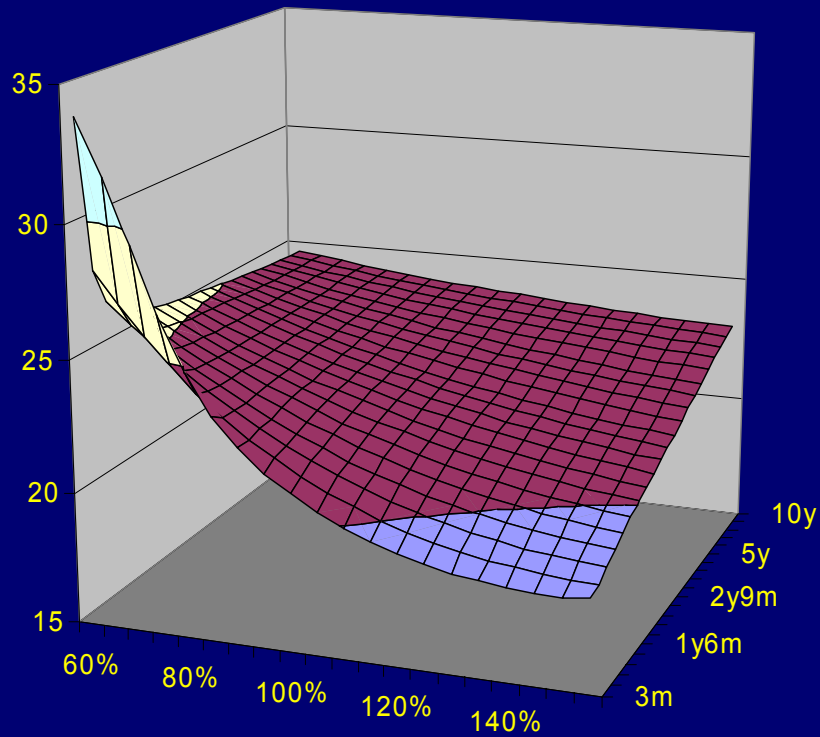


Heston: $\theta=24.3\%$, $\kappa=1.4$, $\xi=21.9\%$, $\rho=-0.53$

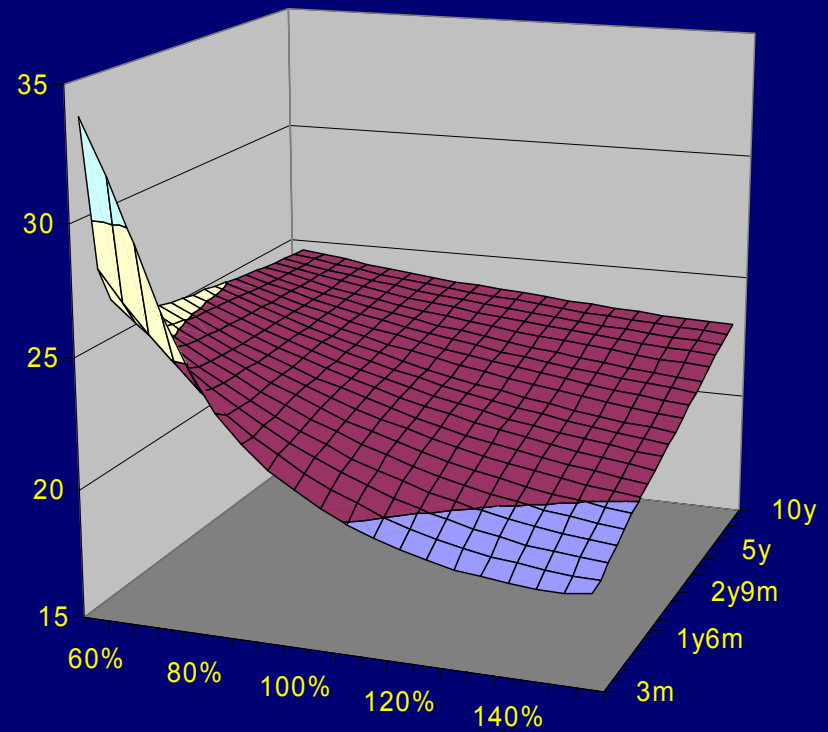
Shortvol: $s_0=20.7\%$

...und Heston-JumpDiffusion

HestonJumpDiff implied volatility



HestonJumpDiff implied volatility



Heston: $\theta=24.3\%$, $\kappa=1.4$, $\xi=21.9\%$, $\rho=-0.53$

Merton: $\lambda=0.06$, $\gamma=-56,169$, $\delta=8.53\%$

Shortvol: $s_0=20.7\%$



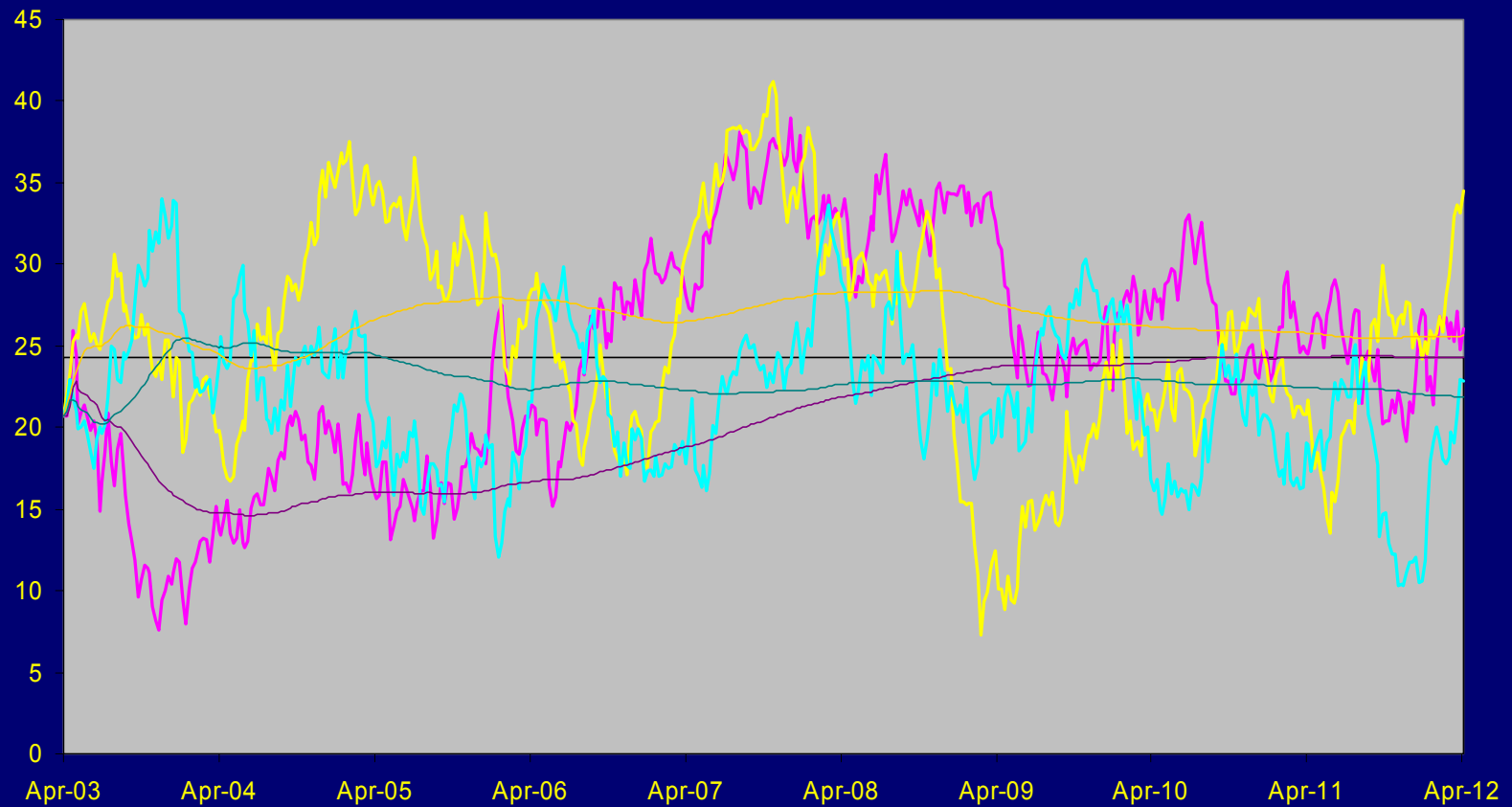
Merton und Heston

- Einige Modelle, insbesondere das Bates Modell, passen sich sehr gut an den Markt an.
- Die Sprünge unterstützen einen ausdrucksvollen Skew bei kurzen Laufzeiten, wohingegen die „Mean-Reversion“ eine langfristige Stabilität sichert.
- Normalerweise wird das einfache Hestonmodell verwendet - die praktische Interpretation und das Hedging von Jumps sind nicht ganz einfach.



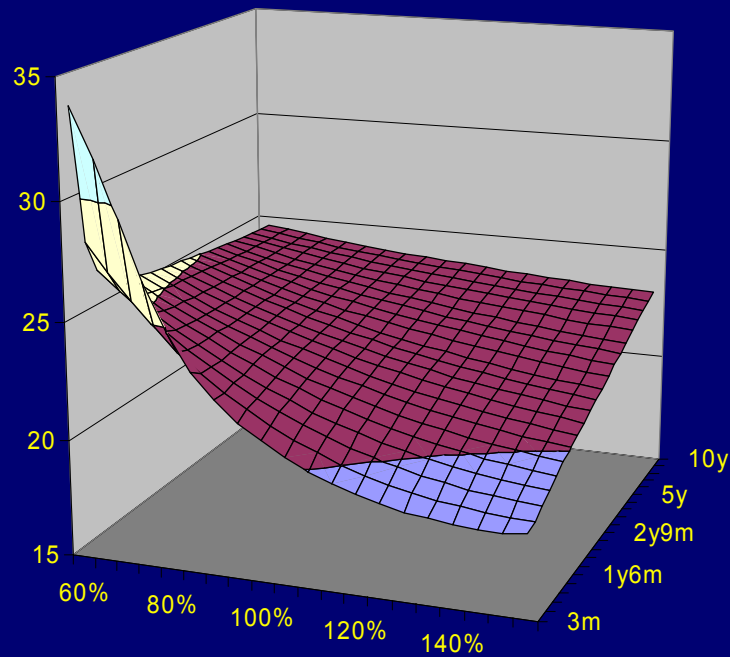
Mean-Reversion

Heston volatility paths - an example of mean reversion

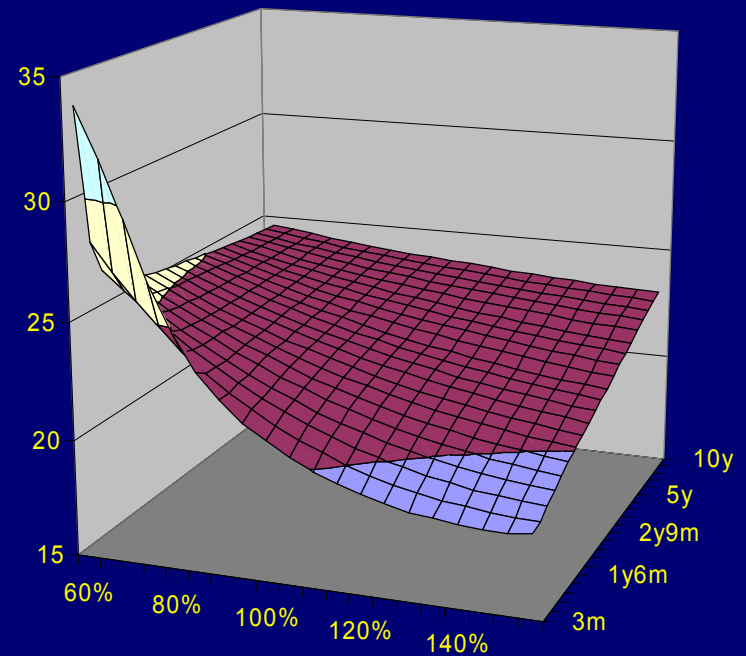


Problem: Forward volatility

HestonJumpDiff implied volatility



HestonJumpDiff implied volatility



- Skew bleibt über die Zeit erhalten, wird aber U-förmig ...



Stochastische Volatilität: Zusammenfassung

- Vorteile (Heston und Bates):
 - Gute und flexible Anpassung an die implied Surface
 - Einfacher zu Hedgen
 - Eine Art Skew bleibt erhalten

- Nachteile
 - Der Forward-Skew ist U-förmig



Stochastische Volatilität: Forward Skew

■ Verbesserte Kalibration

- “Penalty functions”, um bestimmte Skews auszuschließen
 - ◆ Tiefere Kenntnis über die Verteilung notwendig.
- Kalibration direkt auf Forward-Started Options
 - ◆ Deren Preis ist selbst geschätzt.
 - ◆ Selbst bei Erfolg: Verhalten abeits der Eingabeoptionen nicht garantiert.
 - ◆ Sonst eine gute Möglichkeit.

■ Verbesserte Modelle

- Problem der “ShortVol” lösen
- Propagative Modelle: In Arbeit



Stochastische Volatilität: Forward Skew

- Stochastic Implied Volatility (Schönbucher 1998, Cont 2002)
 - Wie bei HJM/BGM-Modellen für Zinsraten wird ein Modell für die ganze Oberfläche entworfen.
 - ◆ Wie werden strukturierte Produkte bewertet ?
 - ◆ Parameter müssen historisch geschätzt werden (z.B. via PCM).
 - ◆ Noch mehr stochastische Faktoren führen zu niedriger Geschwindigkeit.
- Modelle mit “Erinnerung”
- → Noch nicht zufriedenstellend gelöst.

References

- Carr and Madan, 1999: *Option valuation using the FFT*. J. Comp. Finance 2-4
- Dupire, 1994: *Pricing with a Smile*. Risk Magazine 7, 18-20.
- Derman and Kani, 1994: *The volatility smile and its implied tree*. Goldman Sachs Quantitative Strategies Research Notes
- Hull and White, 1987: *The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities*. J. of Finance 42, 281-300.
- Heston, 1993: *A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options*. Rev. Fin. Studies 6, 327-343
- Schobel and Zhu, 1998: *Stochastic volatility with an Ornstein-Uhlenbeck process: an extension*. Working paper
- Schönbucher, 1998: *A market model for stochastic implied volatility (preprint, from the web)*
- Most of the topics presented are reviewed in:
Equity derivatives: Theory and applications, Wiley 2002