


# Finanzmathematik in der Praxis

Hans Bühler  
TU Berlin / Deutsche Bank

Berlin, 14.6.2004



2.619,71	33,35 ▲	1,2%
807,90	2,93 ▲	0,36%

Deutsche Bank 





## Finanzmathematik in der Praxis

- Das Team und seine Aufgaben
- Beispiele:
  - Volatilität
  - Credit-Risiko
  - Amerikanische Optionen
- Wie ein Projekt abläuft
- Fachliche Schwerpunkte im Job.
- Bewerbung im englischen Sprachraum

## The Quant Team

- Team besteht aus jetzt 11 Leuten (aber vorher nur 6)
  - Alle arbeiten in London, bis auf einen in New York.
  - Service fuer Aktien-bezogene Produkte weltweit.
- Verschiedene Fachrichtungen
  - Mathematiker, Physiker und Informatiker.
- Sehr International
  - Drei Briten, zwei Franzosen, zwei Marokkaner, zwei Deutsche, ein Inder und eine Spanierin.
- Der Boss ist DrDr. Overhaus.

## Aufgaben

- Ein Kunden will eine bestimmte komplexe Option kaufen.
- Der Trader muss einen Preis angeben.
- Dazu braucht er
  - (a) Ein mathematisches Modell mit dem
  - (b) ein Bewertungsalgorithmus nach
  - (c) Eingabe der geschätzten Marktdaten den “fairen Wert” berechnen kann.
  
- Wir sorgen fuer (a) und (b).

## Mathematische Modelle: Volatilitaet

### ■ Black & Scholes

$$dS_t = S_t(r_t - d_t)dt + S_t\sigma dW_t$$

Mit bekannter Zinsrate  $r$ , Dividendyield  $d$  und Volatilitaet  $\sigma$ .

- Robust und vertraut
- Numerisch sehr effizient
- Leider nicht sehr realistisch:  
Waehrend  $r$  und  $d$  meist durchaus als deterministisch Angenommen werden koennen (haengt vom Produkt ab), ist dies fuer  $\sigma$  nicht ausreichend.

## Mathematische Modelle: Volatilitaet

- Simple Europaeischen Optionen, z.B. Calls

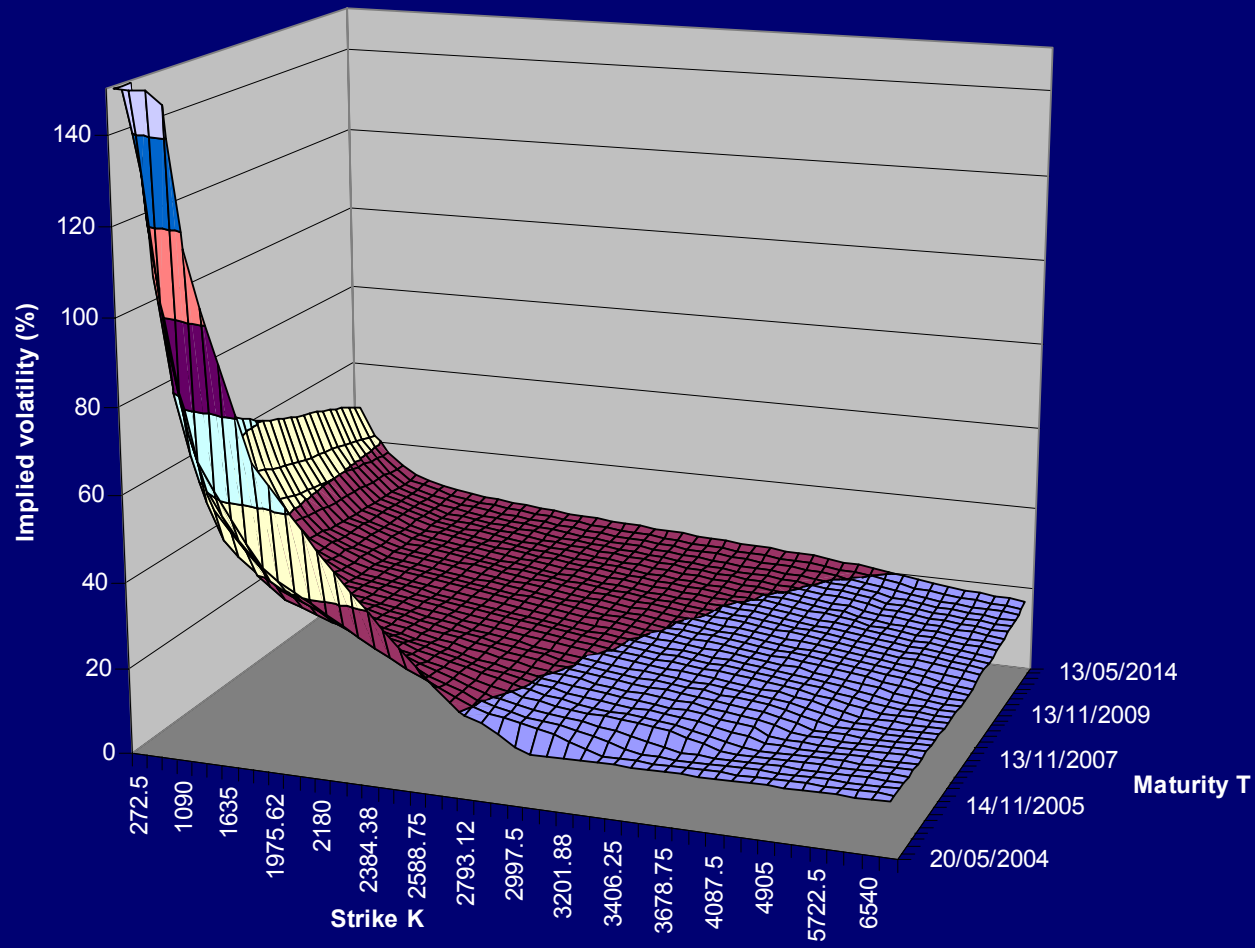
$$C(T, K) := e^{-\int_0^T r_s ds} E[(S_T - K)^+] = BS(K, S_0, T - t; \sigma)$$

werden aktiv gehandelt.

- Wir koennen also die Black&Scholes-Volatilitaet zurueckrechnen und bekommen eine "Implizierte Volatilitaets-Oberflaeche":

# Mathematische Modelle: Volatilitaet

EuroStoxx50E Implied Volatility 13/5/2004



## Mathematische Modelle: Volatilitaet

- Zeitabhaengige Volatilitaet erhaelt die einfache Struktur des Modells, ist aber nicht ausreichend.
- Idee: Volatilitaet selbst ist ein stochastischer Prozess.  
Heston (1993)

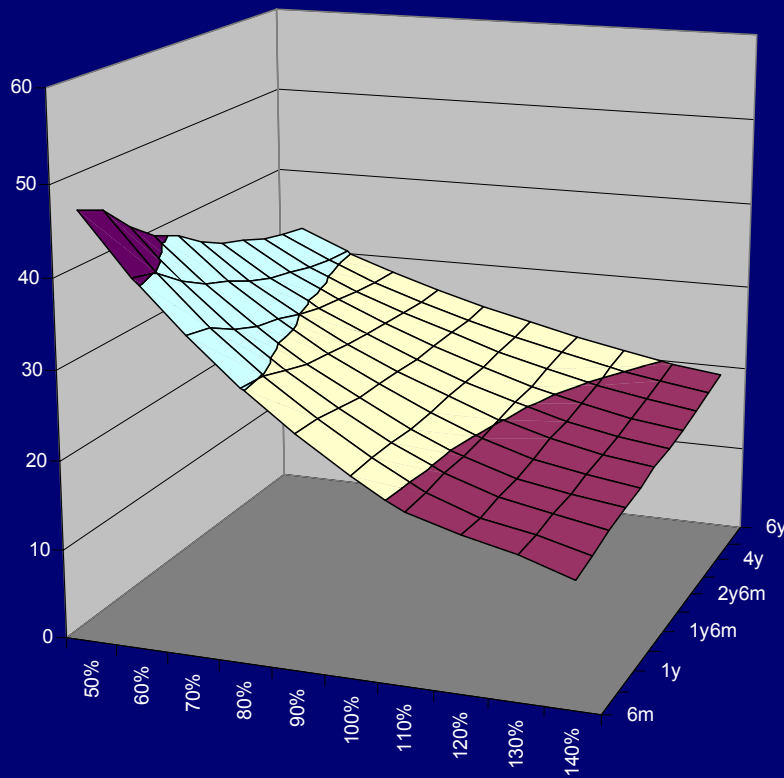
$$dS_t = S_t(r_t - d_t)dt + S_t\sigma_t dW_t$$

$$d\sigma_t^2 = \kappa(\theta - \sigma_t^2)dt + v\sigma_t dB_t$$

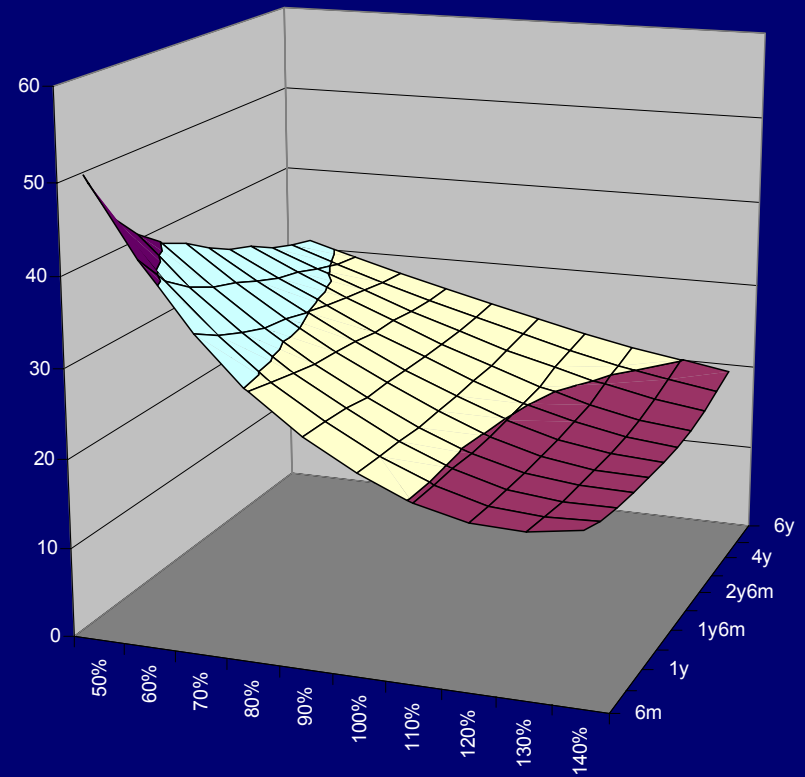
- Modellparameter  $\sigma_\theta, \theta, \kappa, v$  und  $\rho = \langle B, W \rangle$ .
- Dazu Spruenge, um extreme Marktbewegungen zu modellieren.

# Mathematische Modelle: Volatilitaet

Market implied vol



Bates-Modell implied vol



## Mathematische Modelle: Volatilitaet

- Diese Art von Modellen ist besser geeignet, um komplexe Strukturen zu bewerten, aber es existiert noch kein “neuer Standard”.
- Modelle muessen zum Markt “kalibriert” werden (d.h. die Parameter werden anhand des Optionsmarktes bestimmt).
- Wie werden die Positionen gesichert?
  - Spruenge erzeugen Unvollstaendige Maerkte
  - Parameter sind nicht immer stabil.

## Mathematische Modelle: Default Risk

- Default-Risk: Eine Aktie kann auf Null fallen.
- Was passiert mit dem Wert eines Calls

$$C(T, K) := e^{-\int_0^T r_s ds} E[(S_T - K)^+]$$

- Totalverlust !?
- Das ist richtig, aber wir hedgen unsere Position.
  - Wir sind  $\Delta$  Aktien *short*.
  - Wir halten  $(C - \Delta S)/B$  Anteile eines *risikobehafteten* Bonds  $B$  (der ausfällt, genau dann wenn die Aktie ausfällt).
- Verlusst viel kleiner (in einfachen Modellen kein Verlusst).

## Mathematische Modelle

- Volatilitaet
- Credit-Risiko
- Zinsraten
- Commodities (Brent Crude)
- Reale Kosten: Transaktionskosten, Margins, Liquiditaetsprobleme, udgl.

## Bewertungstechniken

- Oft kommen auch Strukturen vor, bei denen das Modellproblem sekundaer ist: Schon fuer Black&Scholes ist es schwer.
- Beispiel: Amerikanische Optionen auf
  - nicht-Markov Prozesse
  - pfadabhaengige Auszahlungen
- Wir betrachten eine Bermudan Option auf einen Basket von Knock-In Puts.

## Bewertungstechniken

- Knock-In Put mit Maturity  $T$ , Strike  $K$  und Barrier  $B < K = S_0$

$$P = (K - S_T)^+ 1_{\inf_{t \leq T} S_t < B}$$

- Sobald die Aktie  $B$  erreicht, ist die Option ein Put mit Strike  $K$ . Dessen maximale Auszahlung ist  $K$ .
  - Davor: Wenn die Aktie steigt, verliert die Option an Wert.
- Ein Basket ist einfach die Summe solcher Puts auf verschiedene Aktien (mit normalisiertem Anfangswert).

$$B = \sum_{i=1}^{20} (K - S_T^i)^+ 1_{\inf_{t < T} S_t^i < B}$$

## Bewertungstechniken

- Darauf geben wir nun eine Garantie:
  - Zu Zeitpunkten  $T_1, T_2, \dots, T_n$  kann der Kunde den Vertrag wieder zurueckgeben und erhaelt dann  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , wobei  $c_{i-1} > c_i$ .
  - An jedem Zeitpunkt T muss der Besitzer des Vertrages also ueberpruefen, ob es es wert ist, die Option zu halten.
- Bermudan Option auf einen pfadabhaengigen Wertprozess.
- Numerisch sehr schwierig
  - Baeume nicht anwendbar (Markov-Zustandsraum zu gross).
  - Amerikanischer Monte-Carlo notwendig.
  - Im Grunde noch offenes Problem.
  - Optimieren ueber beste Ausfuehrungsstrategie.

## Projektverlauf

- **Problemidentifikation**
  - Tradingsite hat ein bestimmtes Problem.
  - Moegliche Loesungen werden besprochen.
  - Projekt wird je nach Zeit/Interesse zugeteilt.
- **Bearbeitung**
  - Ausarbeitung der Loesung (mathematischer Teil).
  - Umsetzung (Programmieren) und Benutzer-Dokumentation.
  - Tests und Weiterentwicklung mit einem Trader.
- **Einsatz**
  - Dokumentation, Erweiterung
  - Kontrolle durch Risiko-Abteilung

## Was sind Schwerpunkte fuer den Job?

### ■ Mathematik

- Stochastic Analysis & Theorie der Finanzmathematik
- Black&Scholes - Mathematik
- Monte-Carlo und Trees, evtl. Finite Differenzen.

### ■ Informatik

- Objektorientiertes Programmieren und Programmentwurf (C++)

### ■ Finance

- Marktuebliche Methoden (Delta/Gamma/Vega-Hedging)
- Produkttypen und Loesungsansaeetze
- *Hull&White lesen!*

### ■ Englisch

## Bewerbungen im englischen Sprachraum

### ■ Lebenslauf

- Eher knapp, aber bei jeder eventuellen vorigen Anstellung ausführen, was Inhalt der Arbeit war (auch bei Praktika)
- Zeitlich rückwärts geordnet.
- Bei Noten nicht Kenntnis des deutschen Systems voraussetzen. Also durchaus schreiben:
  - ◆ Rate 1.0 (1:Best, 4:Worst)
- Bei Fähigkeiten *nie* schreiben, man sei “Experte” oder dergleichen (jedenfalls nicht in England).

### ■ Bewerbungsschreiben

- Auch eher knapp - halbe Seite vielleicht. Ein paar Worte woher man von der Position gehört hat, was man gerade macht, und ein paar Höflichkeitsfloskeln.
- Normalerweise kein Foto.

## Bewerbungen im englischen Sprachraum

- Bewerbungsgespraech
  - Gesprache sind oft sehr technisch und mathematisch.
  - Gedankenprozesse darlegen, wenn man die Loesung nicht sofort hat
    - ◆ Wie in einer Pruefung eben
  - Nicht zu viel auf Papers verweisen, wenn konkrete Fragen gestellt werden.
  - Sagen, wenn man etwas *wirklich* nicht weiss und auch nicht darauf kommen wird.
  - Ruhig und freundlich bleiben.

**... und das war's.**

- Hans Buehler  
hans.buehler@db.com oder buehler@math.tu-berlin.de

Vielen Dank fuer Eure Aufmerksamkeit.